

Una aplicación de la Homología Persistente con datos meteorológicos del Departamento de Sucre, Colombia.*

Andy Rafael Domínguez M.

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena de Indias, Colombia

Update: Julio 2019

Abstract

Este trabajo muestra una aplicación de la homología persistente a datos meteorológicos del Departamento de Sucre haciendo uso de la metodología propuesta por (Zomorodian A, Carlsson G, 2004). Los resultados arrojan rasgos topológicos invariantes que describen las relaciones subyacentes de temperatura y humedad relativa, y de temperatura con velocidad del viento .

Keywords: Homología Persistente, Topología Algebraica, TDA

1 Introducción

La Topología es una de las áreas de las matemáticas interesada en estudiar la forma de los objetos y la manera en que los objetos se relacionan unos con otros. Sus orígenes datan del siglo XVIII a raíz del problema de los puentes de Königsberg y la resolución planteada por Euler. En el siglo XIX y XX la topología incorporó nuevas y sofisticadas herramientas del álgebra abstracta para estudiar espacios topológicos, originando el nombre de topología algebraica. Uno de sus objetivos es el de encontrar invariantes topológicos que caractericen y clasifiquen los espacios topológicos. El campo de estudio se limitaba a trabajar con objetos matemáticos, abstractos, sin embargo a comienzos del siglo XXI interesantes aplicaciones reales se han derivado. Matemáticos como Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian introdujeron el concepto de homología persistente, como el algoritmo y la técnica para su visualización conocida como Diagrama de Persistencia (Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian, 2002), para estudiar las clases o invariantes que conserva un conjunto de datos (nube de puntos) que sufre transformaciones debido a la construcción de complejos simpliciales alrededor de cada punto (bola) en la nube (espacio topológico). Posteriormente matemáticos de la Universidad de Stanford liderados por Gunnar Carlsson redefinieron el concepto de homología persistente y ampliaron

*Parte de los resultados reportados en este *working paper* fueron presentados por el autor en una ponencia extensa presentada en el 18 de julio del 2019 **XXIX Simposio Internacional de Estadística, Universidad del Norte, Barranquilla.**

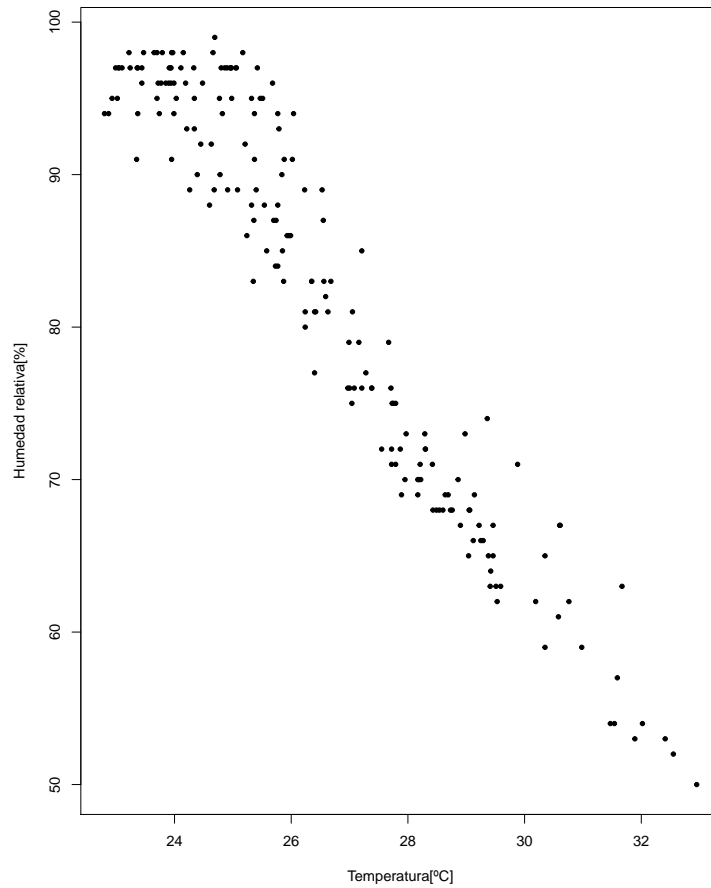
la técnica de visualización adicionando el conocido diagrama de barras (barcode), además de extender numerosas aplicaciones en distintos campos de lo que hoy es denominado como Análisis Topológico de Datos (Zomorodian A, Carlsson G, 2004). En el presente trabajo aplicamos el concepto de homología persistente sobre algunos datos meteorológicos del Departamento Sucre. Visualizamos el diagrama de persistencia y el código de barras implementando la librería recientemente desarrollada en **R TDAstats** (Wadhwa et al. 2018).

Los resultados muestran que la estructura de las relaciones entre las variables temperatura-humedad relativa y temperatura-velocidad del viento conservan invariante topológico de grupo homología 1-dimensional (agujeros). Aplicamos la prueba de hipótesis propuesta en (Robinson y Turner, 2017) para diferenciar estadísticamente dos diagramas de persistencia, arrojando que hay clara diferenciación en la estructura topológica de las relaciones entre temperatura-humedad relativa y temperatura-velocidad del viento.

2 Metodología

La homología persistente permite cuantificar el cambio de las estructuras formadas por los complejos simplíciales Vietoris-Rips sobre la nube de puntos. En este trabajo estamos interesados en calcular la homología persistente para evaluar los cambios en la forma de dos conjuntos de datos, es decir dos nubes de puntos. Para un alcance técnico detallado remitirse a las definiciones matemáticas descritas en (Zomorodian A, Carlsson G, 2004).

Las datos fueron tomados de la web de meteorología **Meteoblue** y representan sólo dos semanas (5 -19 marzo 2019). En las gráficas 1 y 2 se observan las relaciones de la nube de puntos para la temperatura-humedad relativa y temperatura-velocidad del viento.



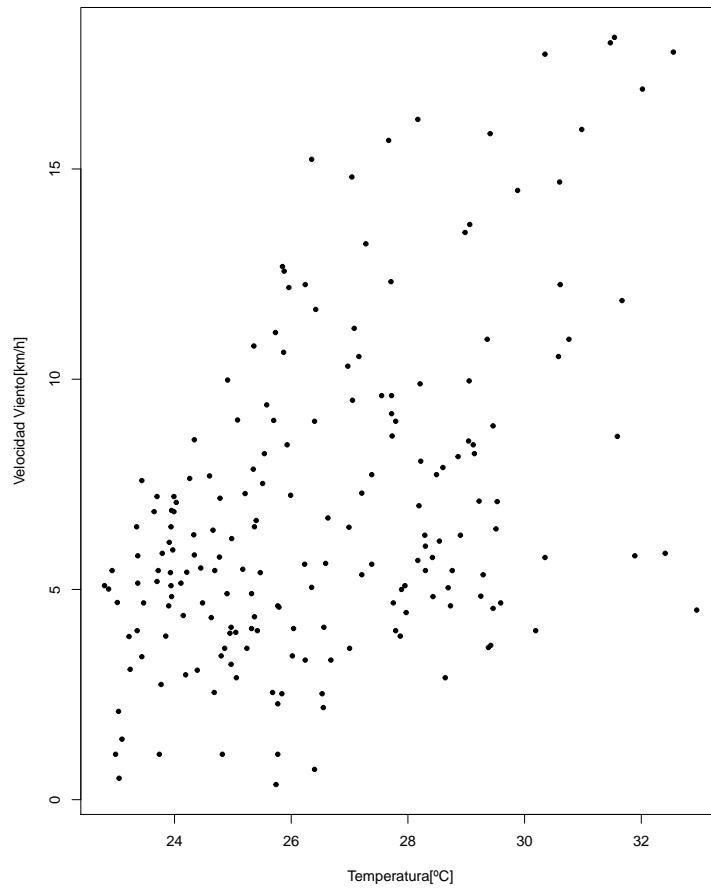


Figure 2: Velocidad Viento vs Temperatura

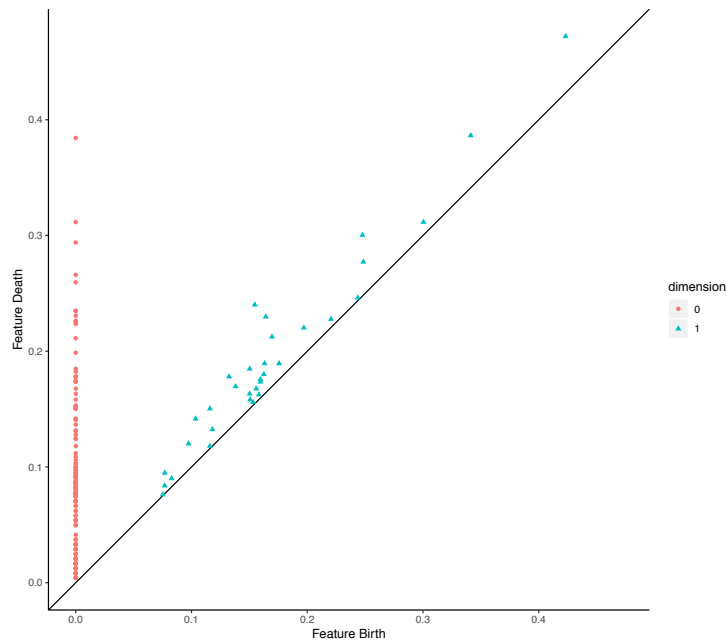


Figure 3: Diagrama de Persistencia relación Temperatura-Humedad Relativa

3 Resultados y discusión

A partir de la nube de puntos (gráficas 1 y 2) se construyen los complejos simpliciales y se calcula la homología persistente, obteniéndose los diagramas de persistencia y de código de barras en las gráficas 3-6.

De los diagramas de persistencia en 3 y 5 se observa que los puntos distantes de la diagonal con dimensión 1 son indicadores de invariantes topológicos de interés, son agujeros que se conservan por las transformaciones de los complejos simpliciales: representan que las variables realizadas conservan unas estructuras en sus relaciones. De igual manera se puede apreciar el inicio y el fin de dichos descriptores topológicos mediante el código de barras.

muestran los resultados de la prueba estadística para los dos diagramas de persistencia (figura 3 y figura 5). Se realizó con una simulación 10000 iteraciones donde se compararon los dos diagramas. En las figuras 7 y 8 se muestran las distribuciones de las dos clases topológicas estudiadas, grupo homológico dimensión 0 (componentes conectados) y grupo homológico dimensión 1 (agujeros). La prueba arroja que existen diferencias estadísticas en los mismos, comparando con la respectiva distancia Wasserstein.

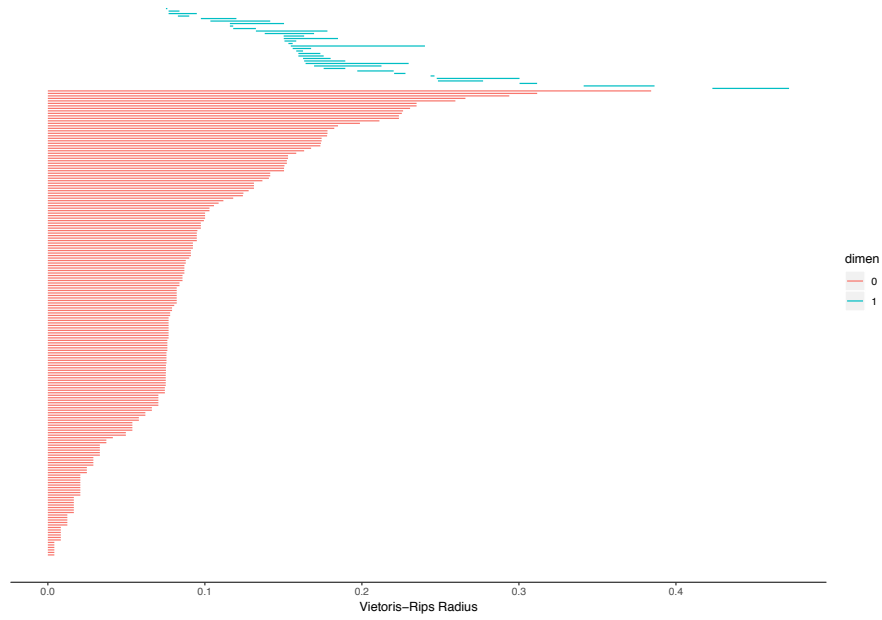


Figure 4: Código de barras relación Temperatura-Humedad Relativa

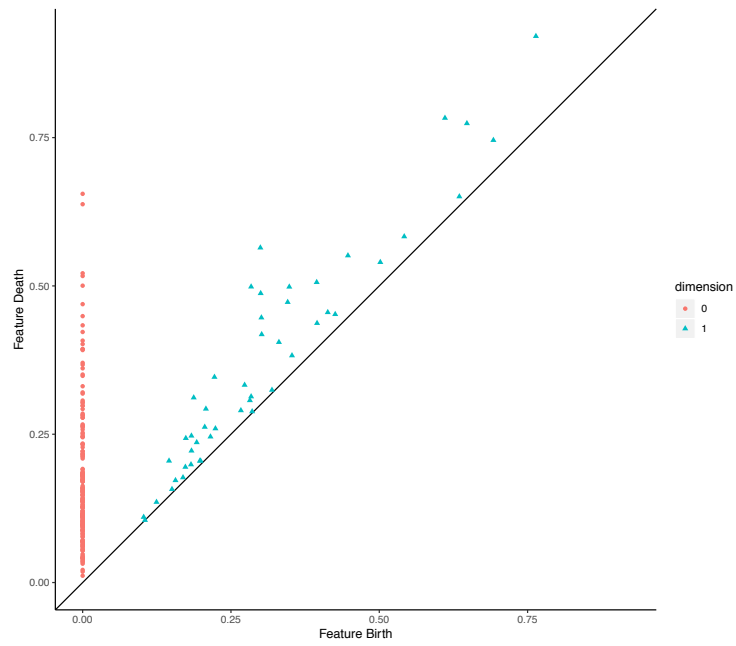


Figure 5: Diagrama de Persistencia relación Temperatura-Velocidad del Viento

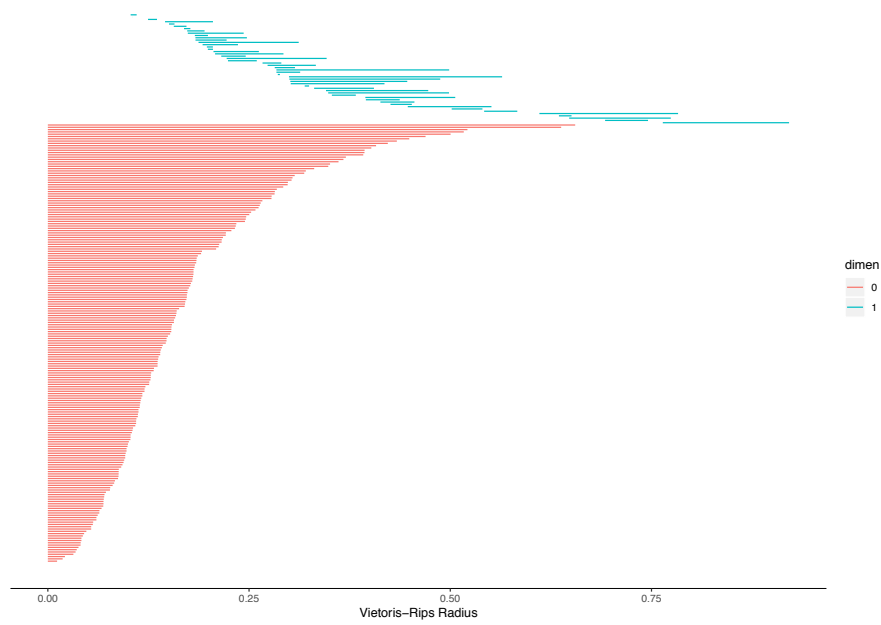


Figure 6: Código de barras relación Temperatura-Velocidad del Viento

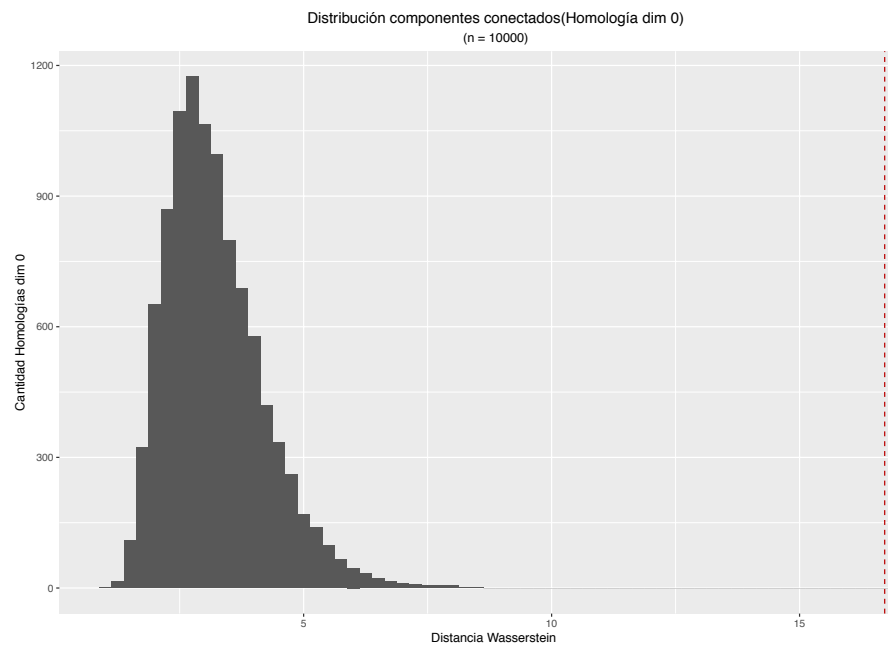


Figure 7: Distribución grupo homología dimensión 0. La línea punteada representa la distancia de Wasserstein entre los dos diagramas de Persistencias

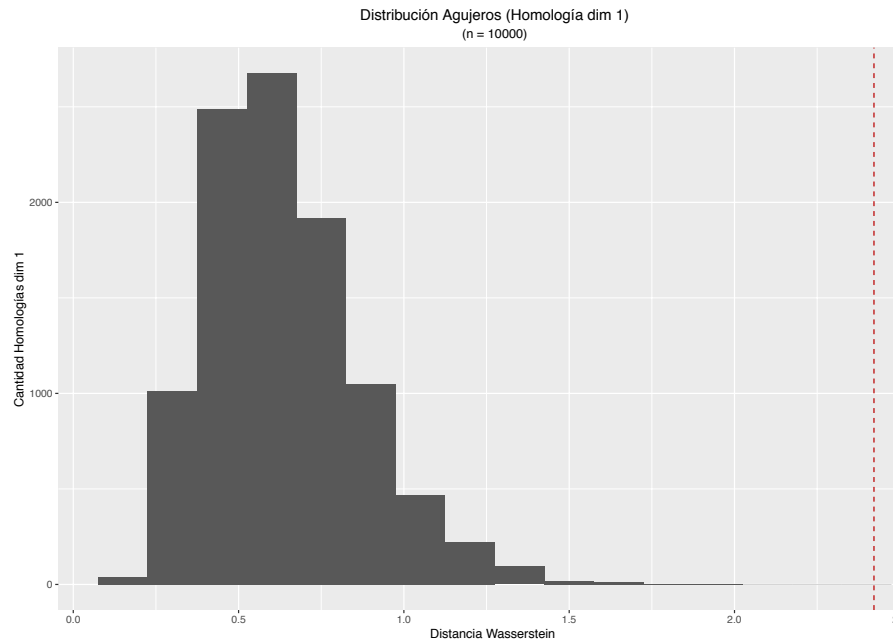


Figure 8: Distribución grupo homología dimensión 1. La línea punteada representa la distancia de Wasserstein entre los dos diagramas de Persistencia.

4 Conclusiones

Hemos realizado una aplicación de la homología persistente a datos meteorológicos del Departamento de Sucre, hallando rasgos topológicos que describen las relaciones subyacentes de temperatura y humedad relativa, y de temperatura con velocidad del viento. Como trabajo futuro se intenta aplicar la misma metodología con datos de series con longitud mayor y de distintas resolución y comparar los resultados aquí reportados.

5 Referencias

- Edelsbrunner; Letscher; Zomorodian (2002-11-01). "Topological Persistence and Simplification". *Discrete Computational Geometry*. 28 (4): 511–533.
- Robinson, A., Turner, K. (2017). Hypothesis testing for topological data analysis. *Journal of Applied and Computational Topology*, 1(2), 241–261.
- Wadhwa et al. (2018), TDAstats: R pipeline for computing persistent homology in topological data analysis, *Journal of Open Source Software*, 3(28), 860.
- Zomorodian, Afra; Carlsson, Gunnar (2004-11-19). "Computing Persistent Homology". *Discrete Computational Geometry*. 33 (2): 249–274.